3°/ On a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(0) = \dfrac{1}{f'(g(0))} = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$, $g'(2\pi) = \dfrac{1}{f'(g(2\pi))} = \dfrac{1}{f'(\pi)} = \dfrac{1}{3}$.

4°/ f étant une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc le réel m admet un seul antécédent par f, noté x_m.

D'où l'équation $2x - \sin x = m$ admet une seule solution x_m.

C)

1°/

a) $f(x) = 4 \Leftrightarrow 2x - \sin x = 4 \Leftrightarrow 2x = \sin x + 4$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(4 + \sin x) = x \Leftrightarrow \varnothing(x) = x$

b) $|\varnothing'(x)| = \left|\dfrac{1}{2}\cos x\right| = \dfrac{1}{2}|\cos x| \leq \dfrac{1}{2}$

2°/ $\varnothing$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, |\varnothing'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ on a : $|\varnothing(x) - \varnothing(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$

On pose $x = U_n$ et $y = \alpha$

$\varnothing(x) = \varnothing(U_n) = U_{n+1}$, $\varnothing(y) = \varnothing(\alpha) = \alpha$ car $f(\alpha) = 4$

D'où $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - \alpha|$

b) On a : $|U_1 - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_0 - \alpha|$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_1 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |U_0 - \alpha|$$

$$|U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_2 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |U_0 - \alpha|$$

$$|U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_2 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |U_0 - \alpha|$$

Donc on constate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$